

---

# Fluidodynamik Übung

## Semesterwoche 10

- Lernziele Übung 2.2
- Grundlagen von Potentialströmungen
- Quiz
- Quellstärke und Zirkulation
- Lösungsstrategien

---

## Lernziele Übung 2.2

- **Übungsserie 2.2** : Potentialströmungen → Kapitel 9, Anhang D
  - Potential, Stromfunktion, komplexe Potentialfunktion
  - Geschwindigkeiten, Staupunkte, Drücke
  - Elementarlösungen und Superpositionen
  - Zirkulation und Quellstärke
- **Übungsstunde** : Konzepte und Anwendungen
  - Eigenschaften von Potentialströmungen → Anhang D
  - Quellstärke und Zirkulation → Anhang D
  - Lösungsstrategien

---

# Grundlagen Potentialströmungen

$$\Phi \longleftrightarrow \underline{u} \longleftrightarrow \Psi$$

$$\operatorname{rot}(\underline{u}) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div}(\underline{u}) = 0$$

$$\underline{u}(\underline{x}_S) = 0 \longleftrightarrow \text{Staupunkte}$$

$$|\underline{u}(\underline{x})|^2 \longleftrightarrow p(\underline{x})$$

$$Q_C \quad \text{und} \quad \Gamma_C$$

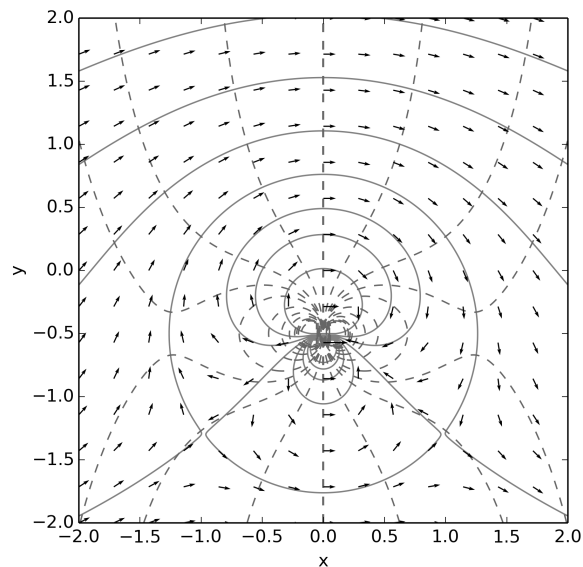
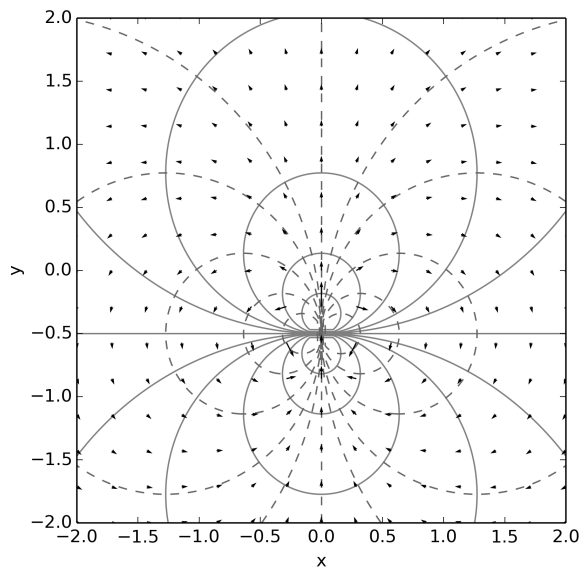
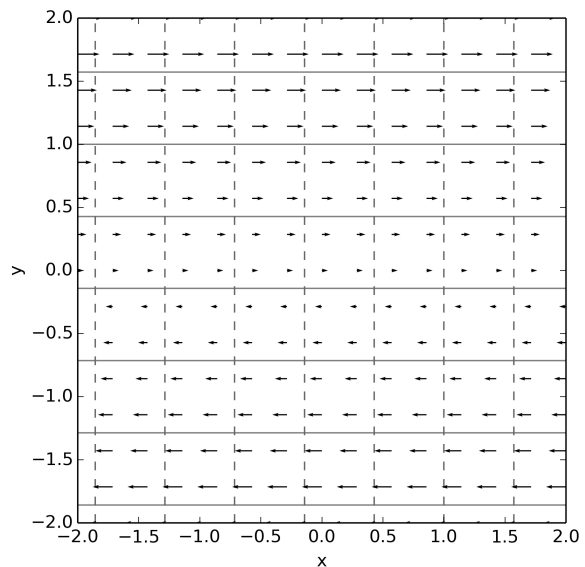
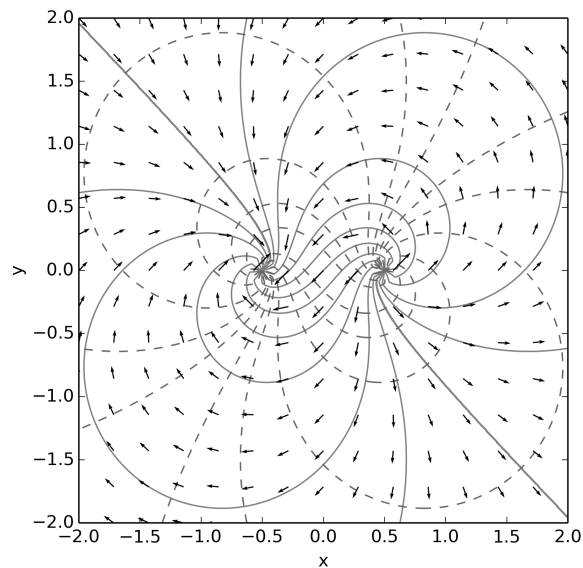
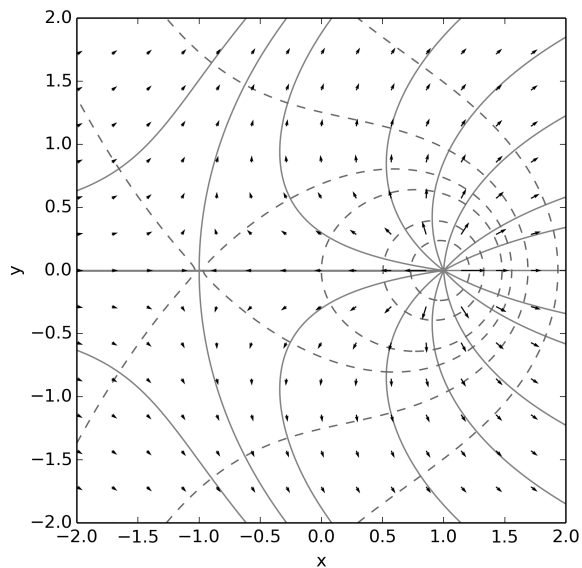
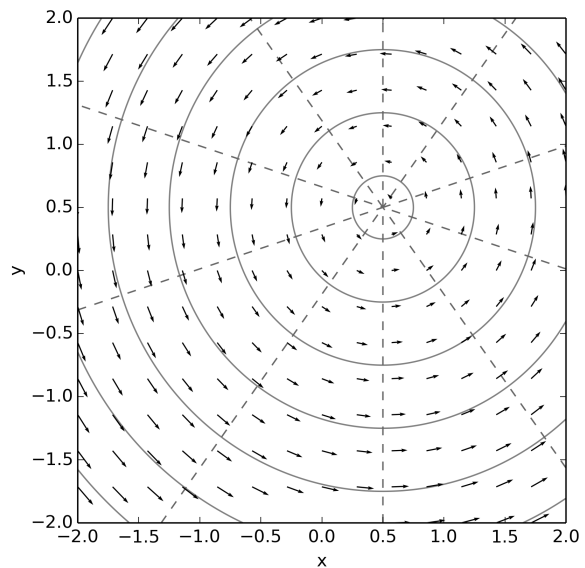
$$F(z) = \sum F_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \Phi(x, y) = \sum \Phi_i(x, y) \\ \Psi(x, y) = \sum \Psi_i(x, y) \end{cases}$$

$$F(z) \longleftrightarrow w(z) \longleftrightarrow \underline{u}(\underline{x})$$

Sei  $\Phi$  eine Potentialfunktion und  $\Psi$  eine Stromfunktion.

Welche Aussagen sind korrekt?

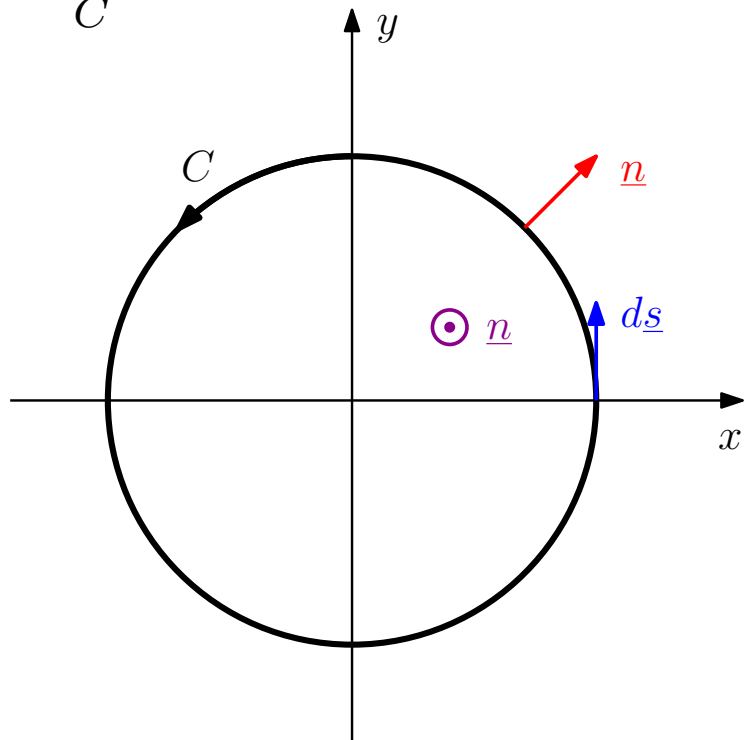
- Stromlinien sind Isolinien der Stromfunktion.
- Potentiallinien können sich im Definitionsbereich nicht kreuzen.
- $\underline{u} = \Delta \Psi$
- Stromlinien sind in jedem Punkt senkrecht zu den Isobaren.
- $\underline{\nabla} \Phi \times \underline{\nabla} \Psi = 0$
- $\Phi = \operatorname{Re}(F(z))$   
 $\Psi = \operatorname{Im}(F(z))$
- Potentiallinien sind in jedem Punkt senkrecht zum Geschwindigkeitsfeld.
- Die Strömung fließt immer von einem hohen zu einem tiefen Potential.



# Quellstärke und Zirkulation

$$Q_C = \oint_C \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int \text{div}(\underline{u}) \, dS$$

$$\Gamma_C = \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{s} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int \text{rot}(\underline{u}) \cdot \underline{n} \, dS$$



$$\underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_p$$

$$d\underline{s} = r \, d\theta$$

$$d\underline{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_p r \, d\theta$$

$$dS = r \, dr \, d\theta$$

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_p$$

---

## Aufgabe 1, Zwischentest 1, 2018

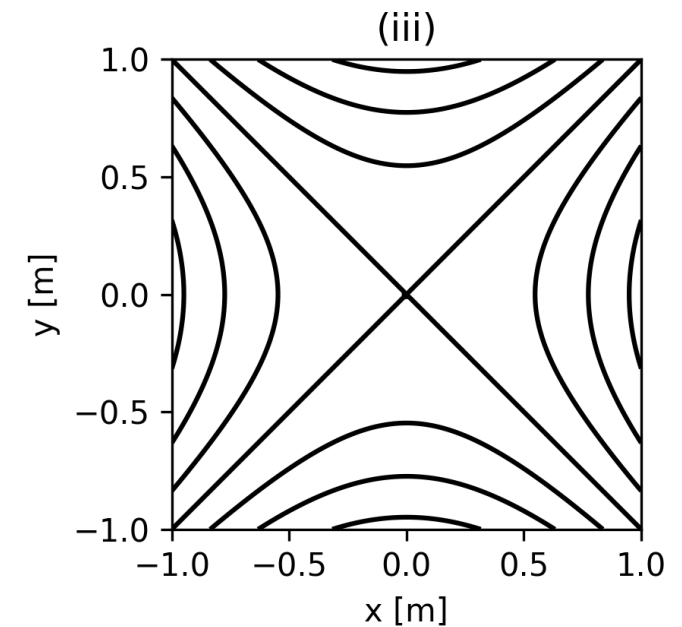
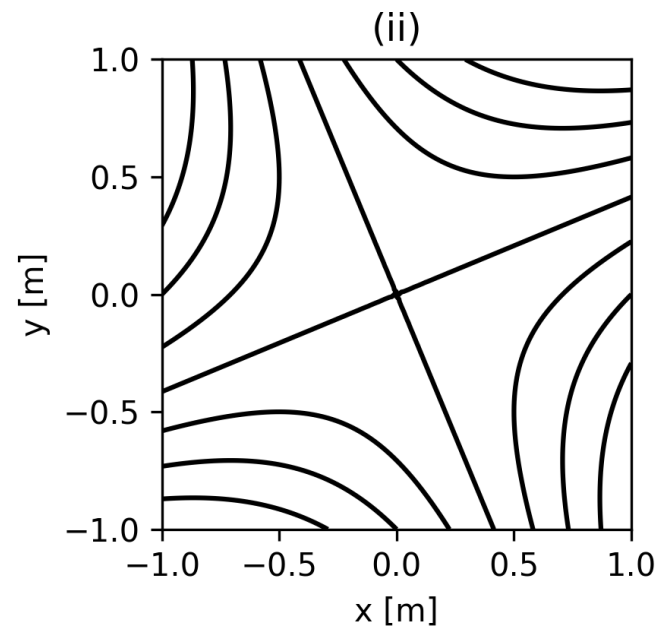
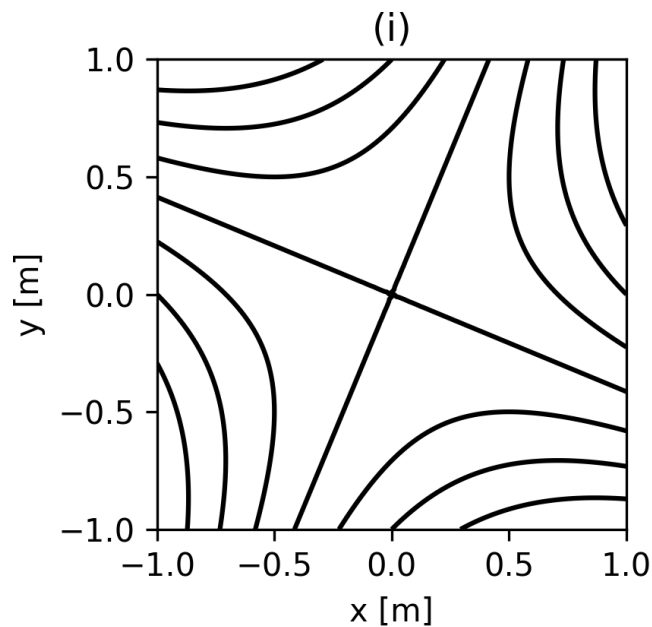
Eine ebene, stationäre Strömung wird durch die Stromfunktion

$$\Psi(x, y) = axy + \frac{b}{2}(x^2 - y^2)$$

beschrieben, wobei  $a$  und  $b$  konstant sind.

- Berechnen Sie die Geschwindigkeitskomponenten  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  der Strömung.  $\Rightarrow u = ax - by$  und  $v = -ay - bx$
- Zeigen Sie, dass  $\Psi(x, y)$  die Stromfunktion einer inkompressiblen Potentialströmung beschreibt.
- Berechnen Sie die Potentialfunktion  $\Phi(x, y)$ .
- Berechnen Sie den Druck  $p(x, y)$  in der Strömung. Welche geometrische Form haben die Isobaren  $p(x, y) = \text{const.}$ ? Der Druck im Staupunkt ist  $p_0$ , die Dichte des Fluids ist  $\rho$ .

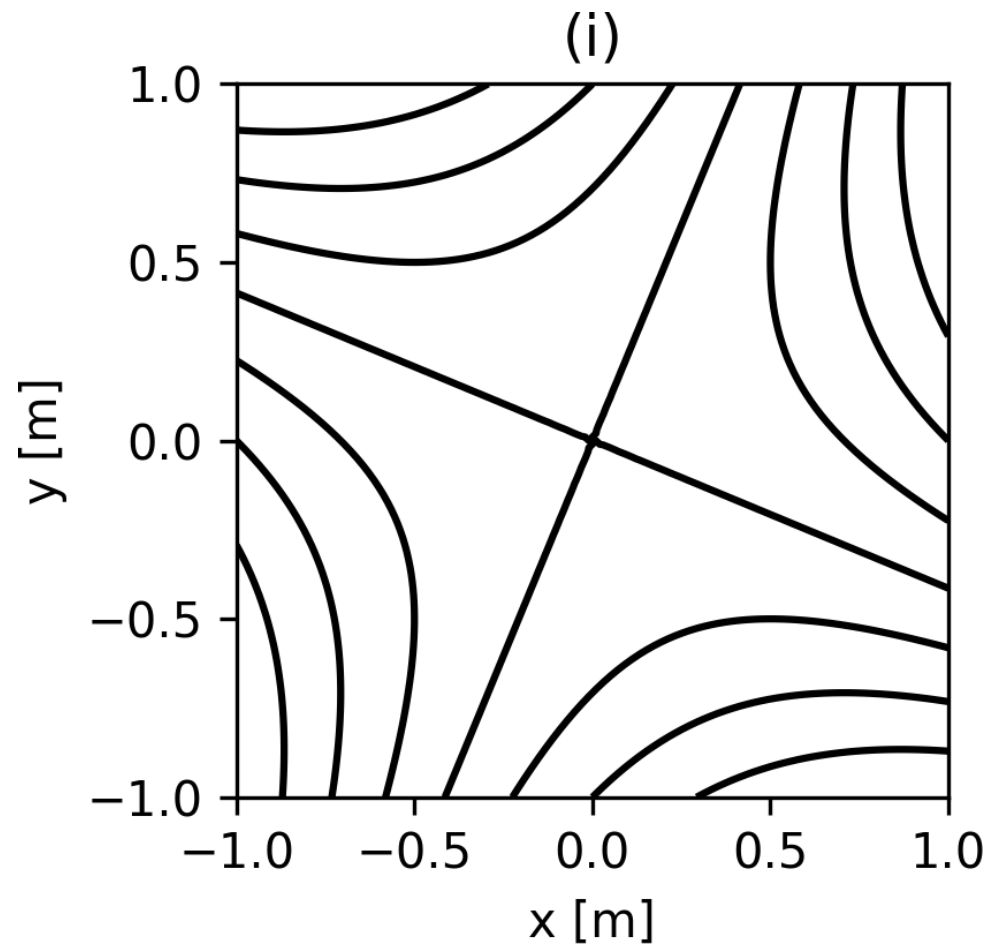
- e) Die Grafiken unten zeigen die Stromlinien der gegebenen Strömung für die Fälle  $a = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $a = 0$  und  $a = -1 \text{ s}^{-1}$ . Weisen Sie die Bilder den verschiedenen Werten von  $a$  zu ( $b = 1 \text{ s}^{-1}$  in allen Fällen).



$$u = ax - by$$

$$v = -ay - bx$$

- f) Zeichnen Sie qualitativ einige Potentiallinien, Geschwindigkeitsvektoren und Staupunkte in die Grafik (i) unten ein.



---

## Alte Prüfungsaufgabe 2

Ein ebenes Strömungsfeld wird durch folgende Stromfunktion in Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  beschrieben:

$$\psi(r, \theta) = \frac{k \cdot \cos \theta}{r} + l \cdot r^2 \cdot \sin(2\theta) .$$

Die Konstanten  $k$  und  $l$  sind positiv.

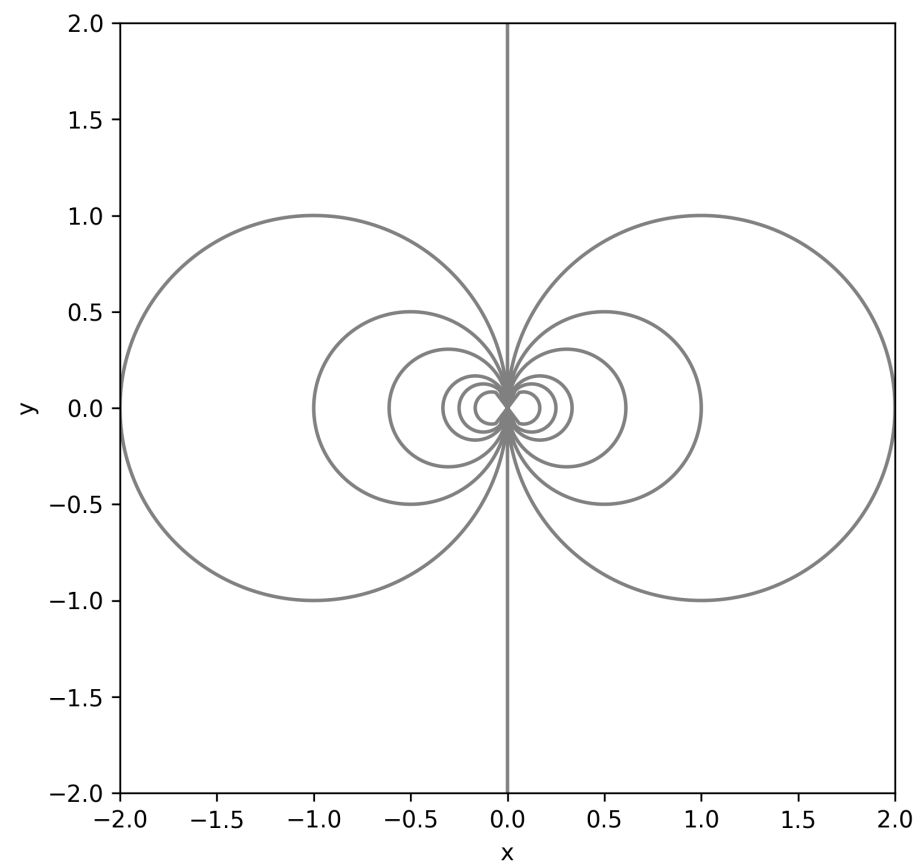
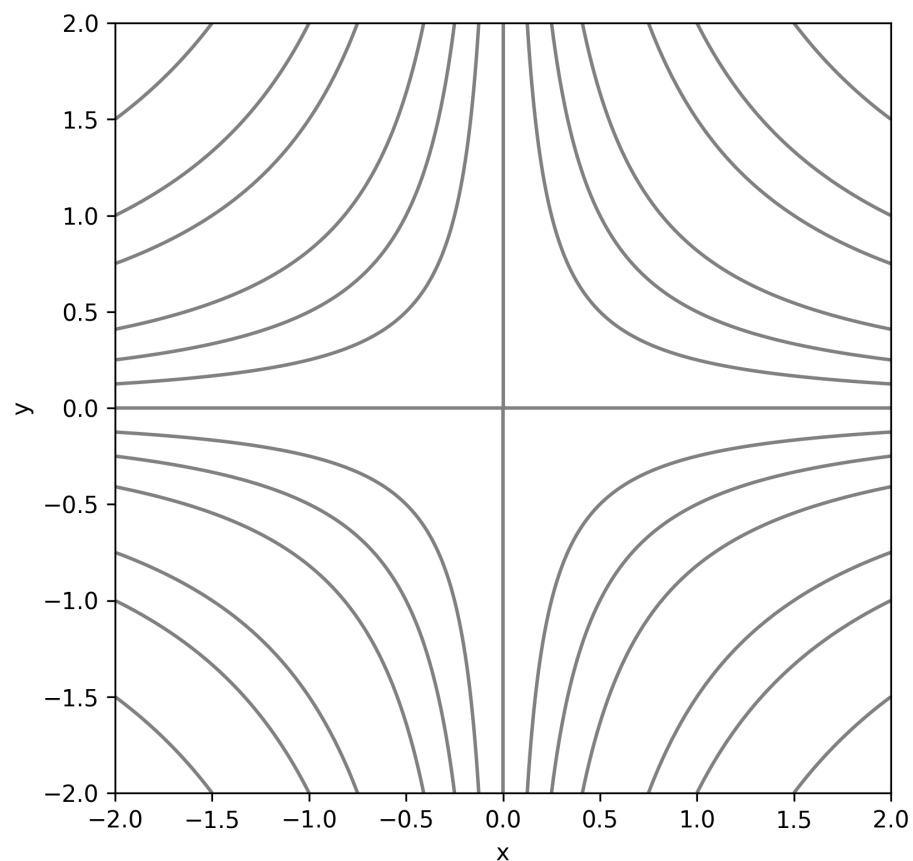
- a) Zeigen Sie, dass das Strömungsfeld rotationsfrei ist.
- b) Berechnen Sie, ausgehend von der Stromfunktion, das Geschwindigkeitspotential  $\Phi(r, \theta)$ .
- c) Geben sie sämtliche Staupunkte im Strömungsfeld an.
- d) Aus welchen Elementarströmungen der Potentialtheorie setzt sich das Strömungsfeld zusammen?

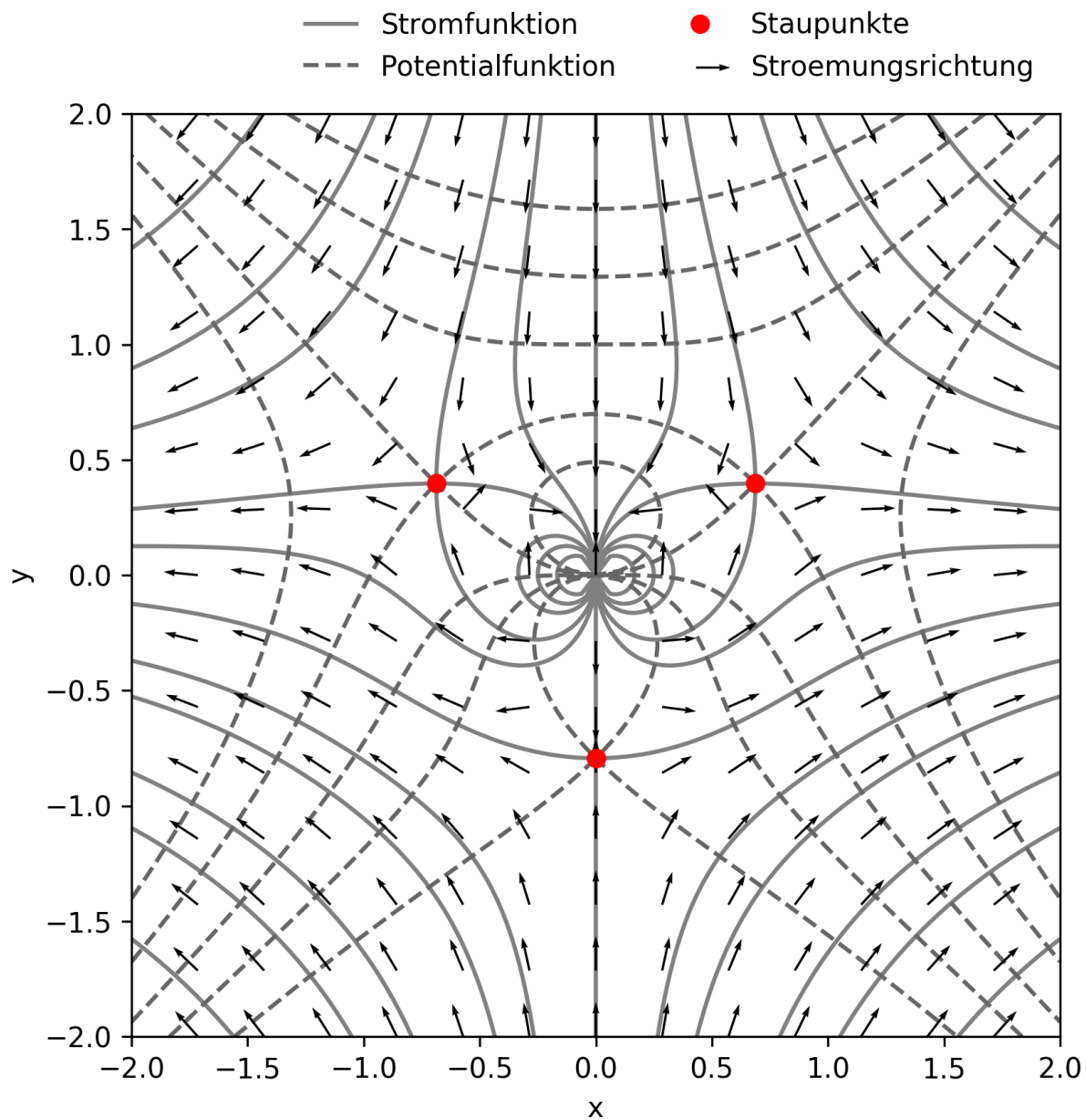
d) Elementarlösungen, mit denen  $\Psi(r, \theta) = \frac{k \cdot \cos \theta}{r} + l \cdot r^2 \cdot \sin(2\theta)$  gebildet werden kann:

$$l \cdot r^2 \cdot \sin(2\theta)$$

$$\frac{k \cdot \cos \theta}{r}$$

— Stromfunktion





$$\text{a) } u_r = -\frac{k}{r^2} \sin \theta + 2lr \cos(2\theta) \quad \text{und} \quad u_\theta = \frac{k}{r^2} \cos \theta - 2lr \sin(2\theta)$$

c) Staupunkte:  $\underline{u}(\underline{x}_s) = \underline{0}$

$$u_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{r_s^2} \sin \theta_s = 2lr_s \cos(2\theta_s)$$

$$u_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{r_s^2} \cos \theta_s = 2lr_s \sin(2\theta_s)$$

$$\Rightarrow \quad r_s^3 = +\frac{k}{2l}, \quad r_s^3 = -\frac{k}{2l} \quad \text{und} \quad \theta_s = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

$$\text{a) } u_r = -\frac{k}{r^2} \sin \theta + 2lr \cos(2\theta) \quad \text{und} \quad u_\theta = \frac{k}{r^2} \cos \theta - 2lr \sin(2\theta)$$

$$\Rightarrow w = (u_r - iu_\theta) e^{-i\theta}$$

$$\text{a) } u_r = -\frac{k}{r^2} \sin \theta + 2lr \cos(2\theta) \quad \text{und} \quad u_\theta = \frac{k}{r^2} \cos \theta - 2lr \sin(2\theta)$$

$$\Rightarrow w = (u_r - iu_\theta) e^{-i\theta} = -ikz^{-2} + 2lz$$

$$\text{c) Staupunkte: } w(z_s) = 0$$